Probabilités

Vocabulaire Une *probabilité* P sur un ensemble fini Ω (appelé *univers* ou *ensemble des possibles* ou *ensemble des éventualités* ou *ensemble des événements élémentaires* est une application de l'ensemble des parties de Ω dans $[0\,;1]$. Un *événement* est une partie (ou un sous-ensemble, c'est la même chose) de Ω.

Principe fondamental Si $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ sont tous les événements élémentaires possibles, on *doit* avoir :

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = 1$$

Cette égalité sert souvent dans les exercices à trouver une probabilité manquante.

Evénement certain C'est Ω. On a :

$$P(\Omega) = 1$$

Evénement impossible C'est $\emptyset$. On a :

$$P(\emptyset) = 0$$

Pour tout événement A, on doit avoir :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Equiprobabilité Si tous les événements élémentaires sont *équiprobables* (c'est à dire qu'ils ont la même probabilité - ou la même chance de se réaliser - ce qui est le cas, par exemple, avec un dé non truqué), on peut appliquer la formule :

$$P(A) = \frac{card\,A}{card\,\Omega} = \frac{\text{nombre des cas favorables à A}}{\text{nombre des cas possibles}}$$

Evénements contraires Si $\overline{A}$ est le *contraire* de A, alors :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Formule fondamentale

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Evénements incompatibles Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont *incompatibles* (c'est à dire qu'ils ne peuvent pas se produire ensemble). Dans ce cas (et seulement dans ce cas), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ car $P(A \cap B) = 0$.

Probabilité conditionnelle (probabilité de A "sachant" B)

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{et donc} \quad P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$$

Indépendance On dit que les événements A et B sont *indépendants* si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

(autrement dit si $P_B(A) = P(A)$)

Dire que deux événements sont indépendants revient à dire que la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de l'autre. Attention, cette notion n'est pas toujours intuitive et il est souvent prudent de faire le calcul...

Formule dite "des probabilités totales"

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \quad \text{et donc} \quad P(A) = P_B(A) \times P(B) + P_{\overline{B}}(A) \times P(\overline{B})$$

Truc pratique Il ne faut pas hésiter à associer mentalement :

OU, $\cup$ et $+$

ET, $\cap$ et $\times$